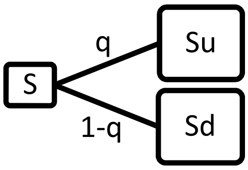
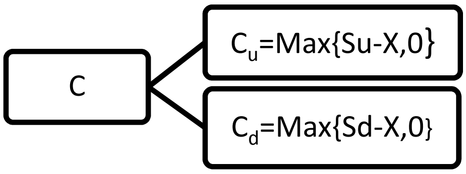
數值方法 **Numerical Method**

二元樹選擇權評價模型 **Binomial Tree Option Pricing Model**

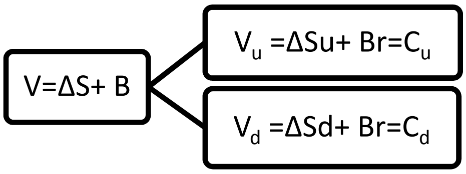
1. 單一期的評價
   假設股票價值在時間 t=0 時爲 S
   在 t=1 時，有兩個可能，(1)股價漲至 Su (機率爲 q)；或(2)股價跌至 Sd (機率爲 1-q)



其中，r=1+利率，$u>1$，$d<1$，$d<r<u$
令一到期日爲 t=1，執行價爲 X 的 Call 的價值爲 C，所以



我們建立一個投資組合，使得在 t=1 時，其 payoff 與這個 Call 一樣
我們買入 Δ 單位的股票，用$B 投入無風險投資
所以 t=0 時，投資組合價值 V



$$\begin{cases} \Delta Su + Br = C_u \\ \Delta Sd + Br = C_d \end{cases}$$

由此方程組，可解出
$$\begin{cases} \Delta = \dfrac{C_u - C_d}{(u-d)\cdot S} \\ B = \dfrac{uC_d - dC_u}{r(u-d)} \end{cases}$$

代回 V，

$$V = \left[\frac{C_u - C_d}{(u-d)S}\right]S + \frac{uC_d - dC_u}{r(u-d)}$$
$$= \frac{1}{r(u-d)}[rC_u - rC_d + uC_d - dC_u]$$
$$= \frac{1}{r}\left[\left(\frac{r-d}{u-d}\right)C_u + \left(\frac{u-r}{u-d}\right)C_d\right]$$

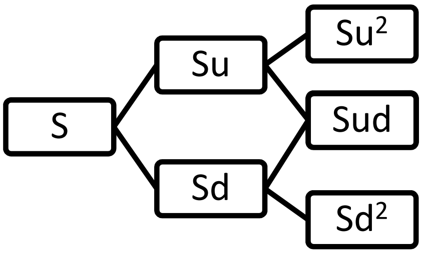
令 $p = \frac{r-d}{u-d}$，則$1 - p = \frac{u-r}{u-d}$

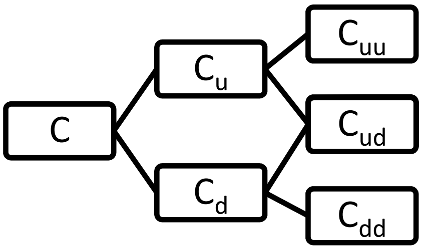
則$V = \frac{1}{r}[pC_u + (1-p)C_d]$

因爲該投資組合在 t=1 時，payoff 與 C 相同，所以兩者 t=0 的價值亦需相等，即$C=V$，否則會出現套利機會。

2. 兩期及多期之評價模型

兩期之評價





- 逐步倒推：

$$C_u=\frac{1}{r}[p\cdot C_{uu}+(1-p)C_{ud}]$$

$$C_d=\frac{1}{r}[p\cdot C_{ud}+(1-p)\cdot C_{dd}]$$

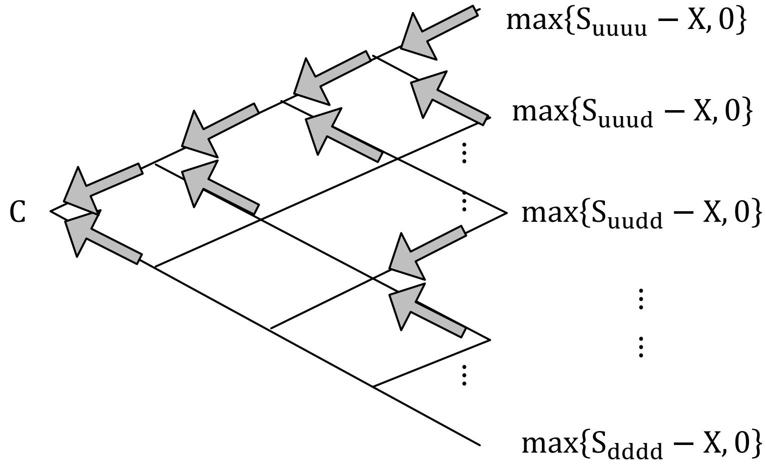
$$C=\frac{1}{r}[pC_u+(1-p)C_d]$$

- 一次直接算出來：

$$\begin{aligned}C&=\frac{1}{r}[pC_u+(1-p)C_d]\\&=\frac{1}{r^2}\{p[pC_{uu}+(1-p)C_{ud}]+(1-p)[pC_{ud}+(1-p)C_{dd}]\}\\&=\frac{1}{r^2}[p^2C_{uu}+2p(1-p)C_{ud}+(1-p)^2C_{dd}]\end{aligned}$$

多期之評價

可用兩期評價之理論，應用在任意 N 期上



3. 演算法

定出 u 和 d

$$\ln\frac{S_T}{S}=\ln\frac{Su^jd^{n-j}}{S}=j\ln\frac{u}{d}+n\ln d$$

j 是上升上次數

$E[j]=nq$

$\mathrm{Var}[j]=n[q(1-q)^2+(1-q)(0-q)^2]=nq(1-q)$

我們用一組估計量，$\hat{\mu}\equiv\frac{1}{n}E\left[\ln\frac{S_t}{S}\right]$，$\hat{\sigma}^2\equiv\frac{1}{n}\mathrm{Var}[\ln\frac{S_T}{S}]$

$$\Longrightarrow\ \hat{\mu}=\frac{E[j]\cdot\ln\left(\frac{u}{d}\right)+n\ln(d)}{n}=q\ln\left(\frac{u}{d}\right)+\ln(d)$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{\mathrm{Var}[j]\cdot\ln^2\left(\frac{u}{d}\right)}{n}=q(1-q)\ln^2\left(\frac{u}{d}\right)$$

爲了要讓二元樹在$N\to\infty$時，趨近於 Black-Scholes 的公式

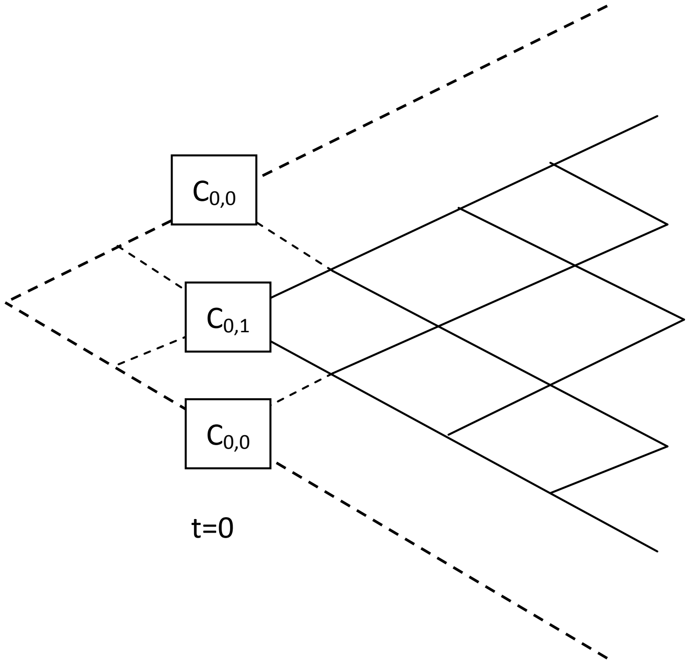
$$n\hat{\mu}=n\left(q\ln\left(\frac{u}{d}\right)+\ln(d)\right)\to\mu T$$

$$n\hat{\sigma}^2=nq(1-q)\ln^2\left(\frac{u}{d}\right)\to\sigma^2T$$

爲了讓節點重合，我們做一個假設，$d=\frac{1}{u}$

$$\begin{cases} u=e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}\\ d=e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}\\ q=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}}\end{cases}$$

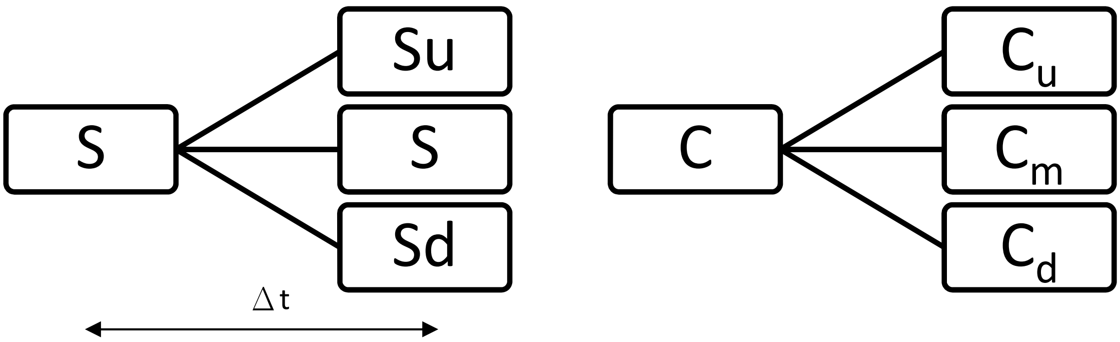
Extended Binomial Tree



$$\Delta = \frac{C_{0,2} - C_{0,0}}{Su^2 - Sd^2}$$

$$\Gamma = \frac{\Delta_u - \Delta_d}{\left(\frac{Su^2 - Sd^2}{2}\right)}$$

三元樹選擇權評價模型 **Trinomial Tree Option Pricing Model**



p_u、p_m、p_d、u、d 的定法與二元樹類似，定出參數使得三元樹的 mean 和 variance 能 match 幾何布朗運動的 mean 和 variance，其中的一組解是：

設 q 是 dividend rate

$$\begin{cases} p_u = -\sqrt{\frac{\Delta t}{12\sigma^2}}\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{1}{6} \\ p_d = \sqrt{\frac{\Delta t}{12\sigma^2}}\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{1}{6} \\ p_m = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$C = e^{-r\Delta t}(p_u C_u + p_m C_m + p_d C_d)$$

有限差分法 **Finite difference Method**

S: Stock price

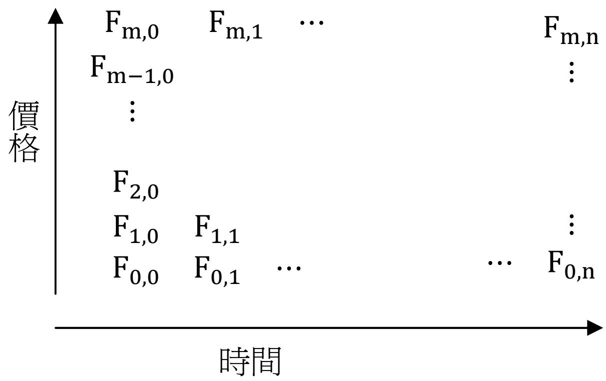
令$\ln S = x = ik$，$i = 0,1,2,\dots,m$

令$t = jh$，$j = 0,1,2,\dots,n$

k 爲價格變動的級距，h 爲時間變動的級距

設 F 爲 Call Option 之價格

$F(x,t) = F(ik,jh) = F_{i,j}$



右邊界值：到了執行日，$F_{i,n} = \mathrm{Max}\,[0, e^{ik} - X]$

上邊界值：遠遠高於執行價，時間價値極低 e^{mk}-X

下邊界值：遠遠低於執行價，時間價値極低 0

Black-Scholes PDE for European Call 爲

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = r\left(C - S\frac{\partial C}{\partial S}\right)$$

而$x = \ln S \Rightarrow S = e^x$

變數變換

$$\frac{\partial C}{\partial S} = \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial S} = \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{1}{S} = \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{1}{e^x} = \frac{\partial F}{\partial x}\cdot e^{-x}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}\right) = rF - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{\partial F}{\partial x}$$

1. Explicit Method

以差分代替微分

從右邊算回來

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{F_{i+1,j+1} - F_{i-1,j+1}}{2k}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{F_{i+1,j+1} - F_{i,j+1}}{k} \dots\dots(1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{F_{i,j+1} - F_{i-1,j+1}}{k} \dots\dots(2)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{(1)-(2)}{k} = \frac{F_{i+1,j+1} - 2F_{i,j+1} + F_{i-1,j+1}}{k^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{F_{i,j+1} - F_{i,j}}{h}$$

代入 PDE 中，得出

$(1+rh)F_{i,j} = aF_{i+1,j+1} + bF_{i,j+1} + cF_{i-1,j+1}$

其中$a = \frac{1}{2}h\left(\frac{\sigma}{k}\right)^2 + \frac{\frac{1}{2}h\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)}{k}$

$b = 1 - h\left(\frac{\sigma}{k}\right)^2$

$c = \frac{1}{2}h\left(\frac{\sigma}{k}\right)^2 - \frac{\frac{1}{2}h\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)}{k}$

我們可以得出，$a+b+c=1$

且若$h \le \frac{\sigma^2}{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)^2}$，$k \le \frac{\sigma^2}{\left|r-\frac{1}{2}\sigma^2\right|}$ ，則$a, b, c > 0$，具有機率之性質

(第 i 期的值等於 i+1 期的值的「期望值」的折現)

2. Implicit Method

用同一期的來算

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{F_{i+1,j} - F_{i-1,j}}{2k}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{F_{i+1,j} - 2F_{i,j} + F_{i-1,j}}{k^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{F_{i,j+1} - F_{i,j}}{h}$$

代入 PDE 中，得出

$$(1-rh)F_{i,j+1} = aF_{i+1,j} + bF_{i,j} + cF_{i-1,j}$$

其中

$$a = -\frac{1}{2}h\left(\frac{\sigma}{h}\right)^2 - \frac{\frac{1}{2}h\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)}{k}$$

$$b = 1 - h\left(\frac{\sigma}{k}\right)^2$$

$$c = -\frac{1}{2}h\left(\frac{\sigma}{h}\right)^2 + \frac{\frac{1}{2}h\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)}{k}$$

$a+b+c=1$，但三者不同能同時爲正值，所以不能再被解釋爲機率

給定時間 j，我們有 i=0 和 j=m 時的 boundary condition，所以得出一組 m-1 個未知數，m-1 個式子的方程組：

$$\begin{array}{lll}
i = m-1 & aF_{m,j} + bF_{m-1,j} + cF_{m-2,j} & = (1-rh)F_{m-1,j+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\text{any } i & aF_{i+1,j} + bF_{i,j} + cF_{i-1,j} & = (1-rh)F_{i,j+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
i = 2 & aF_{3,j} + bF_{2,j} + cF_{1,j} & = (1-rh)F_{2,j+1} \\
i = 1 & aF_{2,j} + bF_{1,j} + cF_{0,j} & = (1-rh)F_{1,j+1}
\end{array}$$

轉成矩陣形式：

$$
\begin{bmatrix}
a & b & c & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & a & b & c & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & a & b & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & a & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \vdots & & & \ddots & & \vdots & & \\
 & & & & & c & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & \cdots & b & c & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & & a & b & c & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & a & b & c
\end{bmatrix}_{(m-1)\times(m+1)}
\begin{bmatrix}
e^{mk}-X \\ F_{m-1,j} \\ F_{m-2,j} \\ \vdots \\ F_{2,j} \\ F_{1,j} \\ F_{0,j}
\end{bmatrix}
=(1-rh)
\begin{bmatrix}
F_{m-1,j+1} \\ F_{m-1,j+1} \\ F_{m-2,j+1} \\ \vdots \\ F_{3,j+1} \\ F_{2,j+1} \\ F_{1,j+1}
\end{bmatrix}_{(m-1)\times 1}
$$

因爲$F_{m,j}=e^{mj}-X$，$F_{0,j}=0$，所以上式可以改成

$$
\begin{bmatrix}
b & c & 0 & & & 0 & 0 \\
a & b & c & \cdots & & 0 & 0 \\
0 & a & b & & & 0 & 0 \\
0 & 0 & a & & & 0 & 0 \\
 & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\
 & & & & c & 0 & 0 \\
 & & & \cdots & b & c & 0 \\
0 & 0 & 0 & & a & b & c \\
0 & 0 & 0 & & 0 & a & b
\end{bmatrix}_{(m-1)\times(m-1)}
\begin{bmatrix}
F_{m-1,j} \\ F_{m-2,j} \\ \vdots \\ F_{3,j} \\ F_{2,j} \\ F_{1,j}
\end{bmatrix}
=(1-rh)
\begin{bmatrix}
F_{m-1,j+1} \\ F_{m-1,j+1} \\ \vdots \\ F_{3,j+1} \\ F_{2,j+1} \\ F_{1,j+1}
\end{bmatrix}_{(m-1)\times 1}
-a
\begin{bmatrix}
e^{mk}-X \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0
\end{bmatrix}
$$

把上式用矩陣表示成

$A\cdot F=(1-rh)F-Z$

$(1-rh)^{-1}F=A^{-1}F-A^{-1}Z$

$\Longrightarrow (1-rh)^{-1}F_{i,j}=a_{i,1}F_{1,j+1}+a_{i,2}F_{2,j+1}+\cdots+a_{i,m-1}F_{m-1,j+1}$

如果 $k\le\dfrac{\sigma^2}{\left|r-\frac{1}{2}\sigma^2\right|}$

則 $\displaystyle\sum_{j=1}^{m-1}a_{i,j}=1$，且對任何 j，$a_{i,j}>0$

所以$a_{i,j}$像是一組 discounting probabilities

蒙地卡羅模擬法 **Monte Carlo Simulation Method**

產生常態分配的隨機樣本：

$$\epsilon=\sum_{i=1}^{12}R_i-6$$

其中$R_i\sim\mathrm{Unif}[0,1]$ i.i.d. $\quad(1\le i\le 12)$

則$\epsilon\sim\mathrm{Normal}(0,1)$

若要產生兩組相關的隨機變數

$$y_1 = x_1$$
$$y_2 = \rho x_1 + x_2\sqrt{1-\rho^2}$$

其中ρ是 y_1, y_2 的相關係數

產生多組相關的隨機變數

$$y_1 = \alpha_{11}x_1$$
$$y_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2$$
$$y_3 = \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3$$

α_{ij}的選法：先定$\alpha_{11} = 1$，選α_{21}使得$\alpha_{21}\alpha_{11} = \rho_{21}$；選$\alpha_{22}$使得$\alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 = 1$；選$\alpha_{31}$使得$\alpha_{31}\alpha_{11} = \rho_{31}$；選$\alpha_{32}$使得$\alpha_{31}\alpha_{21} + \alpha_{32}\alpha_{22} = \rho_{32}$；選$\alpha_{33}$使得$\alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2 + \alpha_{33}^2 = 1$，如此類推。此程序稱爲 Cholesky decomposition。

應用：假設 S 服從幾何布朗運動，在風險中立的環境中

$$dS = \hat{\mu}Sdt + \sigma Sdz$$

其中 dz 是一個 Wiener process，$\hat{\mu}$是風險中立下的期望報酬率。

根據 Ito’s lemma，

$$d\ln S = \left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dz$$

$$\ln S(t+\Delta t) - \ln S(t) = \left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t}$$

$$S(t+\Delta t) = S(t)\exp\left[\left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t}\right]$$

$\epsilon \sim \mathrm{Normal}(0,1)$。

在程式裡，我們用S_j來代表$S(j\Delta t)$，所以股價以

$$S_{j+1} = S_j \cdot e^{\Delta t\cdot\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)+\sigma\sqrt{\Delta t}\cdot\epsilon}$$

來模擬。